생산함수의 규칙성과 전면적 유연성 분석*

유 항 근**

생산함수를 설정할 때 흔히 두 가지 성질을 고려하게 된다. 하나는 생산함수의 규칙성(regularity)인데, 이는 생산함수가 정의역 내의 모든 구간에서 ① 양의 값을 가지고, ② 단순증가함수이며, ③ 준오목성(quasiconcavity)을 만족할 때 성립된다. 두 번째로 고려할 점은 생산함수의 전면적 유연성(global flexibility)인데, 이는 미지의 원생산함수가 연속함수라는 가정하에서 도입된 생산함수가 원생산함수를 충분히 잘 묘사할 수 있도록 일반화되어 있을 때 성립된다. 흔히 사용되는 콥-더글러스 생산함수나 CES함수는 규칙성을 만족하지만 전면적 유연성을 만족하지 못하고, 초월대수함수(translog)나 Fourier Series 등은 전면적 유연성은 만족시키지만 규칙성을 만족하지 못한다. 따라서 규칙성을 가지면서도 충분히 일반화되어 있는 생산함수를 유도하는 것이 중요한 과제이다. 본 논문에서는 베이지안 방법을 이용하여 전면적 유연성을 가진 함수에 규칙성을 부여하는 방법을 제시하고자 한다.

핵심주제어: 전면적 유연성, 규칙성, 모수영역제한
경제학문헌목록 주제분류: C51

I. 서 론

생산함수를 도입하기 위하여 생산함수의 형태를 고려할 때 흔히 생산함수의 규칙성과 생산함수의 전면적 유연성을 생각한다. 생산함수의 설정에서 규칙성이 중요한 이유는 규칙성을 만족하는 함수는 정의역 내의 모든 구간에서 생산함수가 준오목성을 만족하고, 그 결과 함수표면의 기울기가 천천히 변화하여 원함수의 기울기와 비슷한 값을 가지게 된다. 그러나 만일 도입된 생산함수가 준오목성을 가지지 못하면 함수표면이 매끄럽지 못하여 굴곡이 있을 수 있고,

* 논문수정에 유익한 논평을 해 주신 익명의 심사자 두 분에게 감사를 드립니다. 이 논문은 2010년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.
** 중앙대학교 사회과학대학 경제학과 교수, 전화: (031) 670-3241, 팩스: (02) 515-3256, E-mail: hangryu@cau.ac.kr
논문투고일: 2010. 4. 5 수정일: 2010. 5. 31 게재확정일: 2010. 6. 10

그 결과 모형표면의 기울기가 급히 변화하여 원함수의 기울기와 크게 다를 수 있다. 함수의 기울기가 잘 묘사되지 못하면, 경제학에서 추구하는 한계비용, 한계생산성의 연구에 차질을 가져오게 된다.

초월대수함수, Generalized Leontief, and Minflex Laurent함수는 모수의 모든 영역에서 규칙성을 자동적으로 만족하지는 못하는데, 규칙성을 만족하지 못하는 함수에 규칙성을 부여하기 위하여는 생산함수의 모수영역에 어떤 제한을 가하는 것이 일반적인 방법이다. Barnett, Lee, and Wolfe(1985)는 위에서 언급한 함수들이 규칙성을 만족하는 영역을 그림으로 보여주고 있다. 함수의 규칙성에 관한 연구는 Serletis and Shahmoradi(2005, 2007), Barnett and Binner(2004), Barnett and Jonas(1983), Barnett, Lee, and Wolfe(1987) 등에 자세히 설명되어 있다.

함수의 유연성에는 두 가지 유형이 있다. 국지적 유연성(local flexibility)과 전구간 유연성(global flexibility)이 있는데 그 차이점을 구별하여야 한다. 국지적 유연성은 Diewert(1971)에 의하여 처음으로 제시되었으며, 어떤 주어진 한 점에서 원함수와 근사함수의 함수값들이 일치하고, 또 그 주어진 점에서 원래함수와 근사함수의 1계 및 2계 미분값들이 같다는 성질을 의미한다. Diewert는 Generalized Leontief cost function을 이용하여 주어진 점에서 국지적 유연성을 설명하였다.

반면 전 구간 유연성은 정의역 내의 모든 구간에서 도입된 생산함수의 값들이 원함수의 값들과 일치하고, 또 모든 차수에서 두 함수의 미분값들이 일치하는 것을 의미한다. 전 구간 유연성을 만족시키기 위하여는 관측치의 개수와 생산함수에 포함된 모수의 개수가 무한히 증가하여야 한다. 전면적 유연성에 대한 보편적 사용은 Gallant(1981)가 전면적 유연성을 지닌 푸리에 급수함수(Fourier Flexible Functional Form: FFF)를 처음으로 제시하였다. 그러나 Rossi(1985)에 의하면, FFF로 생산함수를 표시할 경우 전 구간에서 모형의 값이 원함수값에 잘 접근하지만, 상당량의 모형 설명력이 Fourier 전개식에 기인한 것이 아니라 기본모형으로 사용된 2차 다항함수에 기인된다는 것을 지적한 바 있다. FFF는 유용성 측면에서 아쉬움이 있지만, 일단 전면적 유연성을 지닌 전개식함수를 도입하였다는 데 큰 의미가 있다. 전면적 유연성을 가진 많은 함수들이 다른 논문들에서도 발견되는데, Gallant and Golub(1984), Ryu(1993, 2009), Ryu and Slottje(1996), Barnett, Lee, and Wolfe(1987), Serletis and Shahmoradi(2005, 2007)에서 볼 수 있다.

전면적 유연성을 가진 함수 중 아주 유용한 것은 Barnett and Jonas(1983)가 제시한 Muntz-Szatz series이다. 이 전개식은 구성원소를 준오목성을 내포한 함수들만으로 만들어 FFF보다 본질적인 면에서 일보 진보된 함수인데, 여기서 규칙성이란 선택된 함수의 각 구성요소(series form의 각 항들)가 규칙성을 가지는 것을 의미한다. Muntz-Szatz series는 전개식의 모든 구성요소들이 규칙성(regularity)을 만족시키기 때문에 경제모형을 만드는데 유리한 장점이 있다.

본 논문의 특징은 변형초월대수함수와 분수급수함수를 처음으로 소개하였으며, 전면적 유연성을 가지는 생산함수(비록 truncated)에 규칙성을 부여하는 방식을 소개하였다는 데 있다. Gallant and Golub(1984), Serletis and Shahmoradi (2005, 2007)는 Diewert, Avriel, and Zang(1981)가 제시한 준오목성 부과를 위한 필요충분조건에 바탕을 두고 컴퓨터 프로그램 MATLAB과 TOMLAB/NPSOL (2008) toolbox를 사용하는데, 이런 프로그램은 일반인이 사용하기에는 어려움이 많다. 본 논문에서는 비교적 간단한 방법으로 일반인이 흔히 사용하는 프로그램 Eviews나 Shazam(2004) 등을 이용하여 생산함수의 규칙성을 설정하는 방법을 제시하는데, 본 논문의 방식은 계산과 논리가 간단하며 그 사용방법이 쉽다는 장점이 있다.

본 논문의 제Ⅱ절에서는 생산함수의 규칙성과 전면적 유연성을 설명하고, 제Ⅲ절에서는 베이지안 방식을 이용한 규칙성 부여방법을 설명하며, 제Ⅳ절에서는 분석에 사용하고자 하는 생산함수를 설정한다. 제Ⅴ절에서는 자료를 이용하여 규칙성이 부여된 모형의 사례를 분석하고, 제Ⅵ절에서는 결론을 제시한다.

Ⅱ. 생산함수의 규칙성과 전면적 유연성

우선 생산함수의 바람직한 성질을 검토하여 보자. Fuss, McFadden, and Mundlak(1978)과 Zellner and Ryu(1998)에 의하며, 산출량 y가 n개의 생산요소에 의하여 만들어질 때 다음과 같은 성질을 생산함수의 필요조건으로 규정하고 있다.

① 정의역. $y=g(x_1, \cdots\cdots, x_n)$는 생산요소$(x_1, \cdots\cdots, x_n)$의 모든 영 또는 양의 영역 R^n에서 하나의 실수값을 가진다. 생산요소$(x_1, \cdots\cdots, x_n)$의 값이 유한하면 산출량값도 유한하고, 생산요소의 양이 영이면 산출량도 영이 된다.

② 단순증가. 생산요소가 증가하면 산출량이 감소할 수 없다.

③ 연속성.

④ 오목성. 함수 g는 생산요소 $(x_1, \cdots\cdots, x_n)$의 모든 영 또는 양의 영역 R^n에서 준오목성 함수이다.

이상의 조건에 흔히 다음과 같은 두 가지 조건을 추가한다.

⑤ 동조성. 함수 g는 동조함수이다.

⑥ 감소하는 생산규모함수. 산출량이 적을 때는 생산함수가 규모체증이지만, 산출량이 충분이 증가하면 생산함수는 규모체감한다.

생산함수의 규칙성은 이상 ①~④의 조건 중 ①을 당연한 것으로 보고, 모든 정의역 내에서 생산함수가 ① 양의 값을 가지고, ② 단순증가함수이며, ③ 준오목성을 지니는 성질을 의미하는 것으로 정의한다.

규칙성을 이해하기 위하여 준오목성 부여에 대하여 구체적인 설명을 하자. 어떤 함수 $h(x, \theta)$가 준오목성을 가질 필요충분조건은 다음과 같은 함수를 이용하여 Diewert, Avriel, and Zang(1981)과 Gallant and Golub(1984)에 잘 기술되어 있다.

$$g(x, \theta) = \min_{z}\{z'\nabla^2 h(x, \theta)z : z'\nabla h(x, \theta) = 0, z'z = 1\}, \qquad (1)$$

여기서 $\nabla h(x, \theta) = (\partial/\partial x)h(x, \theta)$와 $\nabla^2 h(x, \theta) = (\partial^2/\partial x \partial x')h(x, \theta)$이다. 즉, 함수 $h(x, \theta)$의 준오목성은 함수 $g(x, \theta)$의 값이 영이거나 양의 값을 가질 때 만족된다.

생산함수의 유연성에 대하여 설명하자. 함수의 형태가 알려져 있지 않을 때 함수의 식을 제안하기 위하여 흔히 두 가지 방식이 사용된다. 하나는 테일러 전개식을 이용한 근사법이고, 또다른 방법은 지수함수 전개식을 도입하는 것이다. 테일러 전개식은 사용이 쉽다는 장점이 있지만, 어떤 주어진 점 근처에서 다소 떨어진 구간에서는 근사식의 유용도가 떨어진다는 단점이 있다. 이를 보완하기 위하여 전면적 유연성을 가진 함수를 사용한다. 전면적 유연성에 대하여 Gallant(1981)을 보면, 원함수(true function)를 $f^*(x)$로 표시한다. 파라미터 θ^*가 다음에 표시된 평균거리 $B(\theta)$를 최소화시키는 값이라고 가정하자. 표본의 수가 무한히 증가할 때 회귀분석을 이용하여 추정된 파라미터 $\hat{\theta}$은 θ^*에 무한히 접근하게 된다.

$$B(\theta)=\int_{H}\rho[f^{*}(x),\ f(x,\ \theta)]w(x)dx, \tag{2}$$

여기서 $\rho(y,\ \hat{y})$은 원함수와 추정된 함수 사이의 거리를 나타내고, H는 독립변수들의 정의역이며, $w(x)$는 독립변수의 확률밀도함수이다. 원함수 $f^{*}(x)$를 다항식 $f(x,\ \theta)$로 근사하기 위하여 흔히 Fourier 전개식, Legendre 전개식(Ryu and Slottje, 1996), Jacobi 전개식, Lagurerre 전개식, Hermite 전개식들이 사용된다.

전면적 유연성이란 연속함수 $f^{*}(x)$를 선택된 다항식 $\sum_{k=0}^{K}\alpha_k\varphi_k(k)$으로 전개할 때, 다음식이 성립됨을 전재로 한다.

$$\lim_{K\to\infty}\int_{a}^{b}\left[f^{*}(x)-\sum_{k=0}^{K}\alpha_k\varphi_k(x)\right]^2dx=0. \tag{3}$$

흔히 쓰는 Fourier 전개식은 $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}c_k e^{ikx}$로 표시되고, 경제학에서 많이 이용하는 Muntz-Szatz 전개식은 $f(x)=\sum_{k=0}^{k=+\infty}c_k x^{\lambda_k}$로 표시하는데, 여기서 $\lambda_k=\{2^{-k}: k=1,\ \cdots\cdots,\ \infty\}$이다. 초월대수함수(translog)의 차수를 2차에서 무한차수까지 증가시켜 로그 다항함수(Polynomial Series)를 만들어도 전 구간 유연성을 가지게 된다.

Ⅲ. 베이지안 방식을 이용한 규칙성 부여

전 구간 유연성을 내포한 생산함수를 설정할 때 문제점은 도입된 수학적 모형이 경제학 이론과 관련 없이 도입되었다는 데 있다. 이 함수들은 수학적인 함수들이므로 추정된 함수가 원함수에 잘 접근한다는 우수한 성질을 가졌지만, 문제는 경제학자들이 희망하는 규칙성을 가지지 못한 데 있다. 어떤 수학적 접근법에 근거하여 전 구간 유연성을 가진 특정 전개식이 모형으로 도입되면, 규칙성 부여를 위하여 도입된 함수의 파라미터의 영역을 베이지안 방식을 이용하여 적절히 제한하여 함수의 준오목성을 부과하는 데 있다. 이렇게 파라미터 영역을 제한하여 규칙성을 부여하는 방식은 Geweke(1986)에 의하여 제시되었다.

Geweke(1986)는 몬테칼로 적분법을 이용하는데, 어떤 확률변수 $y_T=(y_1,\ \cdots\cdots,\ y_T)'$의 분포함수 형태가 파라미터값 $(\theta_1,\ \cdots\cdots,\ \theta_k)'$을 제외하고 알려져 있다고 가정하자. 우도함수 $L(y_T|\theta)$와 사전 확률밀도함수(prior pdf, $\pi(\theta)$)를 이용

하여 사후확률밀도함수(posterior pdf) $p(\theta|y_T)\propto L(y_T|\theta)\pi(\theta)$를 구할 수 있다. 만일 어떤 함수의 사후 기대치를 구한다면, $E[g(\theta|y_T)]=\int_\theta g(\theta)p(\theta|y_T)d\theta$로 표시된다. 사후확률밀도함수를 대입하여

$$E[g(\theta|y_T)]=\frac{\int_\theta g(\theta)\pi(\theta)L(y_T|\theta)d\theta}{\int_\theta \pi(\theta)L(y_T|\theta)d\theta}. \tag{4}$$

Importance 샘플링을 이용한 몬테칼로 적분법을 이용하여 식 (4)를 다시 쓰자. 우선 독립적 샘플 $\{\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots\cdots,\ \theta_n\}$을 importance 샘플링 확률밀도함수 $I(\theta)$에서 추출한다. 여기서 importance 샘플링 확률밀도함수는 사후확률밀도함수를 잘 묘사하여야 한다. 이제 가중치로 $w(\theta)=p(\theta|y_T)/I(\theta)$를 택하면 식 (4)는 다음과 같이 근사될 수 있다.

$$g_{n,T}=\sum_{i=1}^{n}g(\theta_i)w(\theta_i)/\sum_{i=1}^{n}w(\theta_i). \tag{5}$$

사후확률밀도함수에서 n개의 표본을 추출하여 위 기대치를 구한다면, 모든 i에 대하여 $w(Q_i)=1$이 된다.

$$g_{n,T}=\sum_{i=1}^{n}g(\theta_i). \tag{6}$$

예를 들어, 다중회귀분석모형에서 추정된 모수가 다중 t-분포를 가진다고 가정하자. 주어진 자료에서 모수의 Variance-Covariance 행렬 $\sum=V(\hat{\beta})$이 추정하고, 이를 이용하여 확률변수 $\hat{\beta}$의 임의표본을 다중 t-분포함수에서 추출할 수가 있다.

우선 정규분포 $N[0,\ \sum]$에서 k차원 임의표본(s_i)을 추출하는 방법을 설명하자. 공분산 $\sum$의 특성벡터를 유도한 후에 이를 이용한 C라는 직교행렬을 만들자. 특성근을 대각선 방향에 배치하고 그 외의 요소는 영이라고 놓은 D행렬을 만들면, $C\sum C'=D$와 $D^{-1/2}C\sum C'D^{-1/2}=D^{-1/2}DD^{-1/2}=I$가 성립되어 $\sum=C'D^{1/2}D^{1/2}C$이 된다. 이제 표준화된 k차원 정규분포함수에서 임의표본벡터 e를 추출하여 $s=C'D^{1/2}e$로 놓으면,

$$E[s's]=E[C'D^{1/2}e'eD^{1/2}C]=C'D^{1/2}E[e'e]D^{1/2}C=\sum.$$

만일 Cholesky 분해법을 이용한다면, $PP'=\sum$에서 $s=Pe$로 놓아도 같은 결과를 얻을 수 있다. 이제 다중 t-분포에서 임의의 표본추출을 완성하기 위하여 $v=n-k$차 χ^2 분포에서 z_i를 추출하면 된다. 결과적으로 k차원 다중 t-분포 확률샘플은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\beta_i=\hat{\beta}+s_i/\sqrt{z_i^2/v}. \tag{7}$$

본 논문에서는 베이지안 방법을 이용하여 모수값들의 영역을 규칙성을 만족하는 영역으로 제한함으로써 제시된 생산함수에 규칙성을 부여할 수 있다. 도입된 생산함수에 준오목성을 부여하기 위하여, 규칙성을 만족하는 모수들만을 선택하여 이들의 평균치를 구하여 생산함수의 모수로 사용한다. 추출된 모수들 중에서 어떤 값들이 규칙성을 만족하는지는 차후에 설명하기로 한다. 주어진 다중 t-분포에서 n개의 확률변수를 추출하는 방법에 대하여 자세히 보려면, Judge *et. al*.(1988)과 Shazam Manual(2004)를 보기 바란다.

Ⅳ. 생산함수의 설정

전면적 유연성을 가진 생산함수에 규칙성을 부여하는 방법이 식 (5)에 기술되어 있는데, 이를 구체적으로 예를 들어 설명하기 위하여 우선 몇 개의 생산함수들을 도입하자. 기본모형으로 콥-더글러스 생산함수를 기술한 뒤 이의 확장 모형들을 설명하자.

① 콥-더글러스 생산함수

$$\ln y=a+b\ln x_1+c\ln x_2. \tag{8}$$

② 초월대수 생산함수(translog production function)

경제학에서 가장 많이 사용되는 다항함수는 초월대수함수이다.

$$\ln y=a+b_1\ln K+c_1\ln L+b_2(\ln K)^2+c_2(\ln L)^2+d(\ln K)(\ln L). \tag{9}$$

③ 변형초월대수함수(modified translog function)

콥-더글러스 생산함수를 CES함수로 확장시킬 때, $\log K \rightarrow K^{\rho}$의 변수변환을 이용하였다. 비슷한 변수변환을 이용하여 초월대수함수(translog function)를 다

음과 같은 형태로 변형시킬 수 있다. 초월대수함수 식 (9)에 $\log K \rightarrow K^{\rho}$, $(\log K)^2 \rightarrow K^{\rho/2}$, $(\ln K)(\ln L) \rightarrow K^{\rho/2}L^{\rho/2}$을 대입하면,

$$y=(a+b_1x_1^{\rho}+c_1x_2^{\rho}+b_2x_1^{\rho/2}+c_2x_2^{\rho/2}+d_{11}x_1^{\rho/2}x_2^{\rho/2})^{1/\rho}. \tag{10}$$

이 함수는 CES함수와 달리 동차함수도 아니고, 대체탄력성도 고정된 값을 가지지는 않으며, 변형된 초월대수함수는 생산함수의 바람직한 성질인 규칙성을 모든 모수값에서 만족하지는 않는다.

④ 베이지안 변형초월대수함수(Bayesian modified translog function)

변형초월대수함수는 일반적으로 함수의 규칙성을 만족시키지 못하므로, 규칙성을 부여하기 위하여 여러 가지 연구들이 진행되었다. 본 논문에서는 베이지안 방법을 이용한 방법을 제시한다. 즉, 식 (10)의 모수들의 영역을 양의 값으로 제한하여 생산함수에 규칙성을 부여하고자 한다.

$$b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0,\ c_1 \geq 0,\ c_2 \geq 0,\ d_{11} \geq 0.$$

⑤ 분수급수함수(fractional power series)

$$y=a_0+\sum_{k=1}^{K}a_kx_1^{1/2k}+\sum_{k=1}^{K}b_kx_2^{1/2k}+\sum_{k=1}^{K}c_kx_1^{1/2k}x_2^{1/2k}, \tag{11}$$

$$y=a+a_1x_1^{1/2}+b_1x_2^{1/2}+a_2x_1^{1/4}+b_2x_2^{1/4}+c_1x_1^{1/2}x_2^{1/2}+c_2x_1^{1/4}x_2^{1/4}. \tag{12}$$

분수급수란 일반급수함수의 차수 대신에 역의 차수를 사용한 것이다. 예를 들면, x^n 대신에 $x^{1/n}$을 사용하는 것이다. 우측의 항에 여러 개의 변수가 사용된 경우에 규칙성 부과를 위하여 차수의 영역을 제한할 수 있다. Barnett and Jonas(1983)와 Berge(1963)는 우측의 항 $x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$에서 승수지수의 합이 1보다 적으면($\alpha+\beta \leq 1$), $x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$이 준오목함수가 된다는 것을 보여준 바 있다.

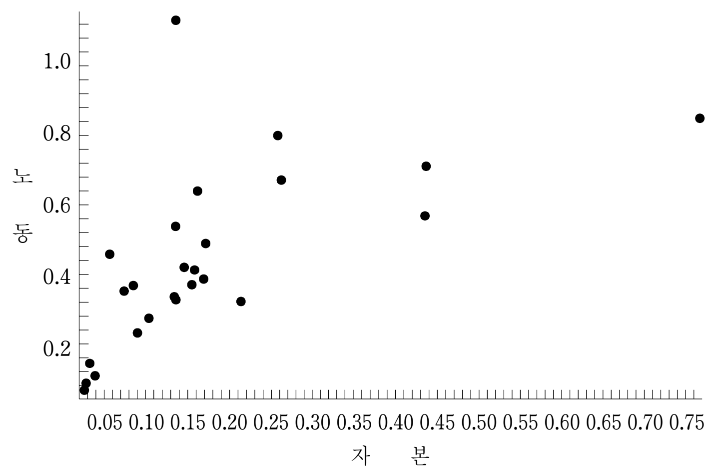
⑥ 베이지안 분수급수함수(Bayesian fractional power series)

분수급수함수에 규칙성을 부여하기 위하여 분수급수함수의 모든 모수값들이 영이거나 양의 값을 갖도록 제한하자.

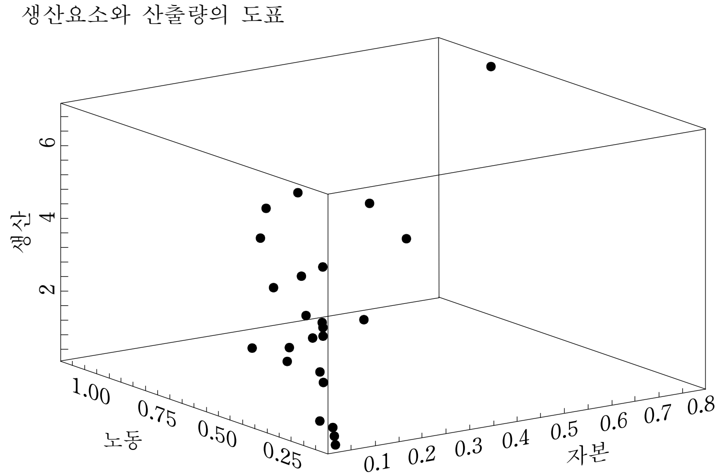
V. 규칙성이 부여된 모형의 사례분석

Zellner and Revankar(1969)의 운송사업 관련자료를 이용하여 도입된 생산함수에 어떻게 규칙성을 부여하는지 보여주고자 한다. 이 자료는 오래된 자료이지만 생산함수를 연구할 때 흔히 기준이 되는 자료이기 때문에 Zellner and Ryu (1998)와 함께 본 논문에서 인용하였다. 경제학 논문에서 생산요소가 2개일 때는 Zellner and Revankar(1969)의 운송사업 관련자료를 많이 사용하고, 생산요소가 3개일 때는 Nerlove(1963)의 자료를 많이 이용한다. Nerlove의 자료를 확장

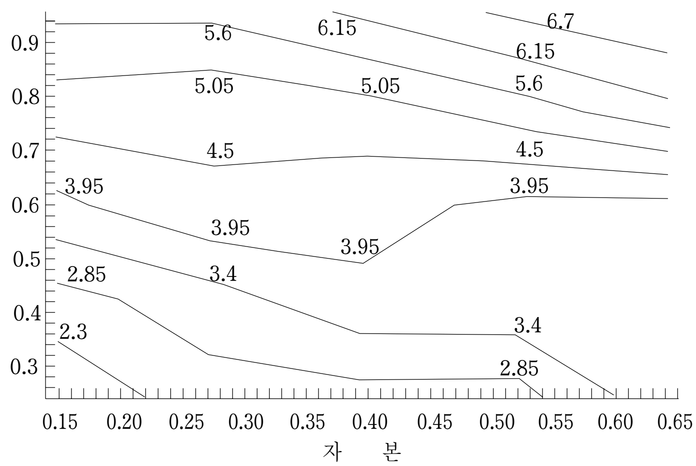
〈그림 1a〉 생산요소의 산포도



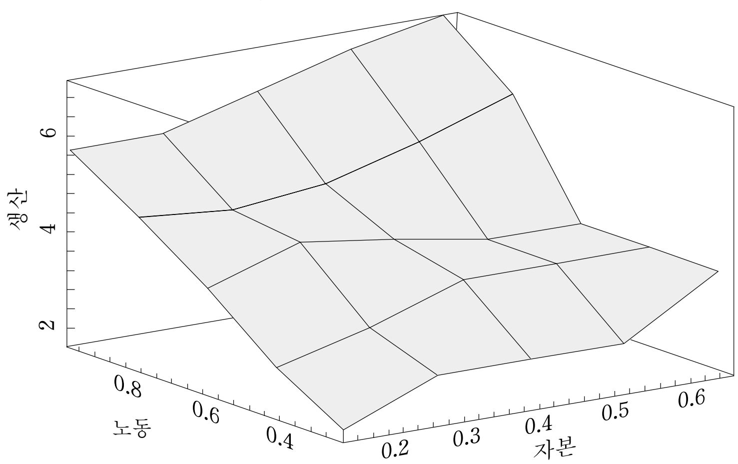
〈그림 1b〉 생산요소와 산출량의 도표



〈그림 1c〉 표본자료의 등량곡선



〈그림 1d〉 표본자료의 3차원 생산함수 표면



〈그림 1〉 표본자료를 이용한 생산요소의 산포도와 산출량의 도표 및
표본자료를 이용한 생산함수의 등량곡선과 3차원 생산함수의 표면

한 것이 Greene(2008) table F4.3에 사용되었다.

우선 주어진 자료만을 이용하여 생산함수의 등량곡선과 3차원 생산함수의 표면을 그려 보자. 사용된 프로그램은 Doornik(2007)가 만든 OxMetrics의 PcGive software로 생산요소와 산출량의 자료를 입력하면, 등량곡선과 3차원 생산함수의 표면을 구할 수 있다.

〈그림 1c〉의 등량곡선을 보면, 곡선이 수평으로 누워 있어서 노동의 한계산출량이 자본의 한계산출량보다 큰 것을 알 수가 있다. 자본이 한 단위 증가할

때보다 노동이 한 단위 증가할 때 더 많은 양의 산출량을 증가시킨다. 이는 노동의 한 단위 임금이 자본의 한 단위 비용보다 높다는 것을 의미한다. 관측점들이 밀집된 곳에서는 등량곡선을 비교적 정확히 그려질 수 있지만, 관측점들이 몇 개 없는 영역에서는 부정확하게 그려질 수밖에 없다. 〈그림 1c〉와 〈그림 1d〉는 주어진 표본자료만을 이용하여 그림을 그린 것이고, 경제모형이 도입되면 곡선과 곡면이 다소 평평하게(smoothing) 근사될 것이다. 그리고 경제이론이 도입되면 도입된 등량곡선이 원점에 대하여 볼록한 모형을 가지도록 제한될 것이다.

1. 콥-더글러스 생산함수

식 (8)의 모수를 최소자승법으로 추정하면,

$$\log y = 2.29_{(0.107)} + 0.279_{(0.0807)}(\log K) + 0.927_{(0.0983)}(\log L) + u. \tag{13}$$

괄호 안의 수치는 표준오차이다. 등량곡선과 생산함수의 표면은 다음과 같다. 〈그림 2a〉에서 보면 등량곡선들이 원점에 대하여 볼록한 것을 알 수 있다. 그러나 콥-더글러스 생산함수의 대체탄력성은 일로 고정되어 있는데, 〈그림 1c〉에서 보면 표본자료의 등량곡선은 다소 평평하여(flat) 대체탄력성이 1보다 커 보인다. 따라서 가장 간단한 형태의 생산함수 콥-더글러스함수보다는 다소 복잡한 형태의 생산함수가 표본자료에 더 잘 부합된다고 볼 수 있다. 예를 들면, CES함수나 초월대수함수가 더 적합할 수 있다. 부록에서 보완적 설명을 하게 된다.

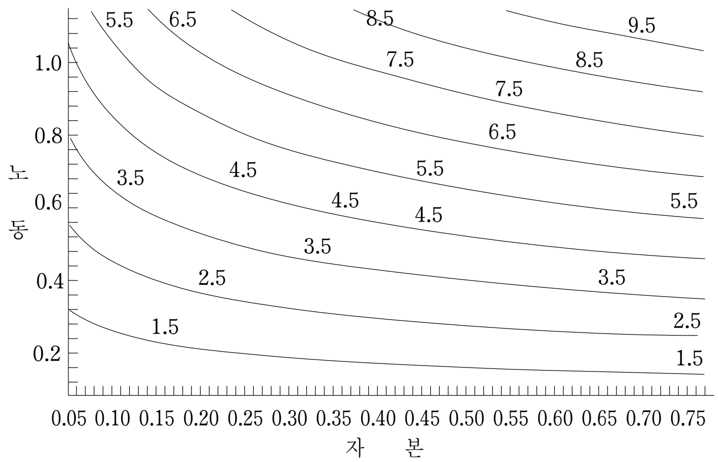
전면적 유연성에 바탕을 둔 모형에 규칙성을 부여한 경우와 규칙성 조건을 부여하지 않은 경우에 등량곡선들에 어떤 변화가 일어나는가를 검토하여 보자. 등량곡선을 이용하면 생산함수의 규모수익성질, 단순증가성질, 준오목성 등을 검토할 수 있다.

2. 초월대수함수

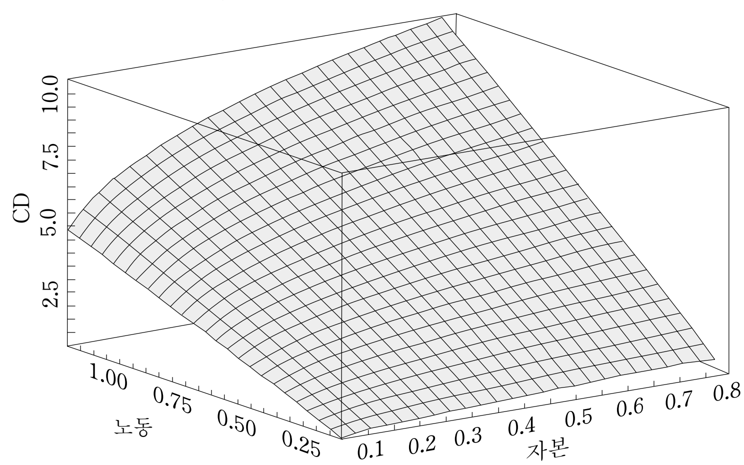
최소자승법으로 식 (9)의 모수를 추정하면,

$$\begin{aligned} \log y = {} & 1.93_{(0.179)} - 0.0204_{(0.298)}\log K + 0.669_{(0.427)}\log L - 0.0732_{(0.125)}(\log k)^2 \\ & + 0.0234_{(0.198)}(\log L)^2 - 0.0713_{(0.305)}(\log K)(\log L) + u, \end{aligned} \tag{14}$$

〈그림 2a〉 콥-더글러스의 등량곡선



〈그림 2b〉 콥-더글러스의 생산함수 표면

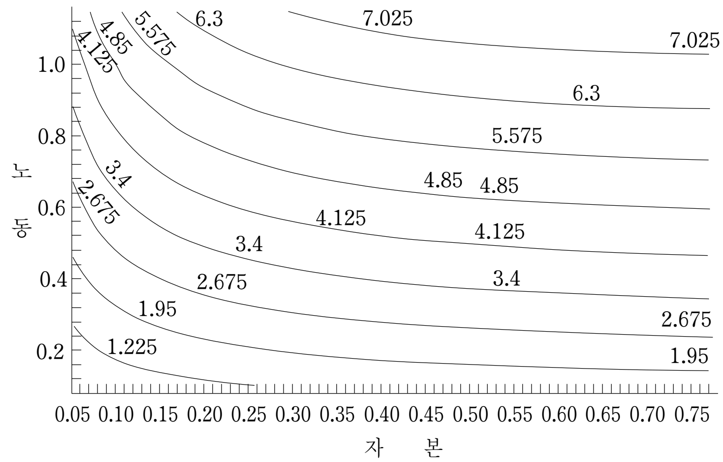


〈그림 2〉 콥-더글러스의 등량곡선 및 생산함수 표면

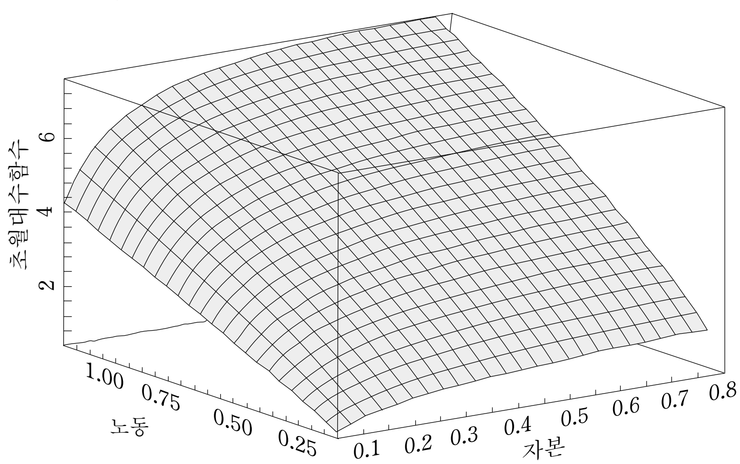
괄호 안의 수치는 표준편차인데 모든 모수들의 추정된 t값들이 절편을 제외하고는 적게 나왔다. 초월대수함수의 등량곡선과 생산함수의 표면은 다음과 같다.

콥-더글러스 생산함수의 경우와 비교하면, 노동의 중요성이 커진 것을 볼 수 있다. 이런 성향은 표본자료의 경우에서도 발견된다. 초월대수함수의 경우 별도로 규칙성을 가지도록 조치를 취하지 않았지만, 추출된 등량곡선과 표면이 규칙성을 만족하는 것으로 보인다. 이런 이유로 초월대수함수가 생산함수로 자주 이용된다.

〈그림 3a〉 초월대수함수의 등량곡선



〈그림 3b〉 초월대수함수의 표면



〈그림 3〉 초월대수함수의 등량곡선 및 표면

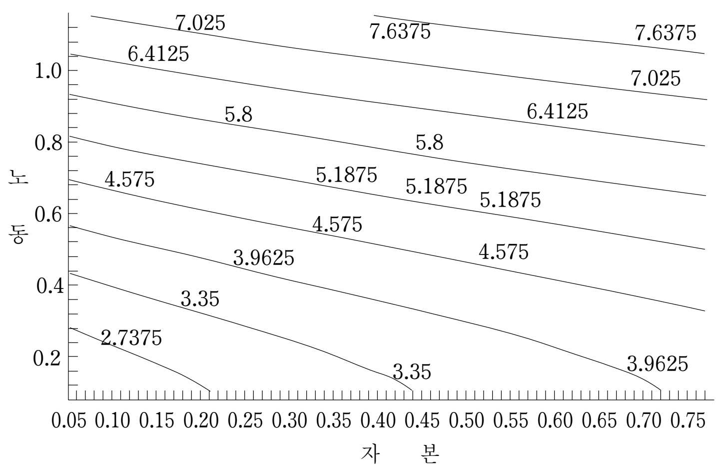
생산함수의 형태를 콥-더글러스 생산함수에서 초월대수함수로 변화시키는 것이 정당한 것인지 확인하여 보기 위하여 Zellner(1984)에서 보여준 POR(Bayesian posterior odds ratio: K_{AB})를 계산하여 보았다. 부록에 자세한 설명이 기술되어 있다. 만일 콥-더글러스 생산함수를 모형 A라고 부르고, 초월대수함수를 모형 B라고 부르자. 만일 POR값이 1보다 크게 나오면 A모형이 자료에 의하여 선호된다는 것이고, 만일 POR값이 1보다 적게 나오면 B모형이 선호된다는 것이다. 계산결과 $K_{AB}=0.2856$을 얻었고, 초월대수함수가 자료에 더 부합된다는 것을

알 수 있다.

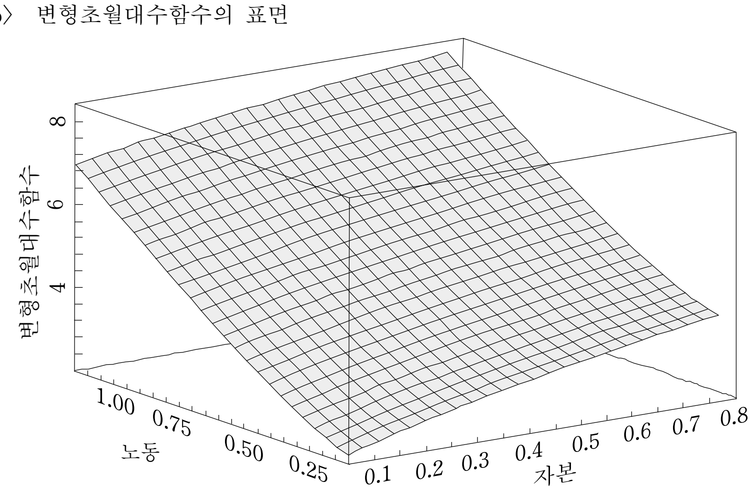
3. 변형된 초월대수함수

생산함수의 형태를 콥-더글러스 생산함수에서 CES로 변환시킬때, $\log K \rightarrow K^{\rho}$ 변환을 이용하였다. 잔차항 자승의 합을 최소화시키는 방법으로 식 (10)의 모수를 추정한 결과,

〈그림 4a〉 변형초월대수함수의 등량곡선



〈그림 4b〉 변형초월대수함수의 표면



〈그림 4〉 변형초월대수함수의 등량곡선 및 표면

$$y = [-0.371_{(0.947)} - 0.551_{(7.43)}K^{1.01} + 7.56_{(4.29)}L^{1.01} + 6.49_{(5.75)}K^{1.01/2} - 2.83_{(4.33)}L^{1.01/2} - 2.42_{(12.42)}K^{1.01/2}L^{1.01/2}]^{1/1.01} + u. \quad (15)$$

등량곡선이 원점에 대하여 볼록하지 않고, 함수의 규칙성이 만족되지 못하고 있다. 규칙성을 부여하기 위하여 제Ⅳ절에서 설명한 Geweke(1986)의 베이지안 방식을 이용하여 보자.

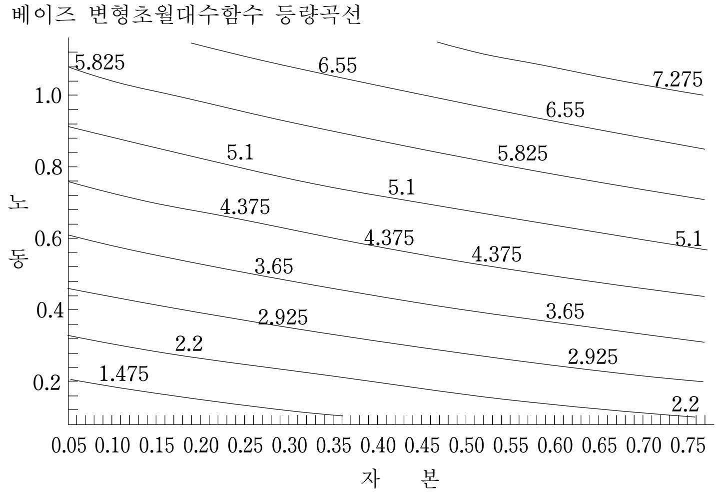
4. 베이즈 변형초월대수함수

함수식 (10)을 준오목함수로 만들기 위하여 절편을 제외한 모든 항의 모수를 음이 되지 않도록 제한하자. 모수들이 영이거나 양의 수치를 가지면, 결과식이 준오목성을 보유하게 된다.

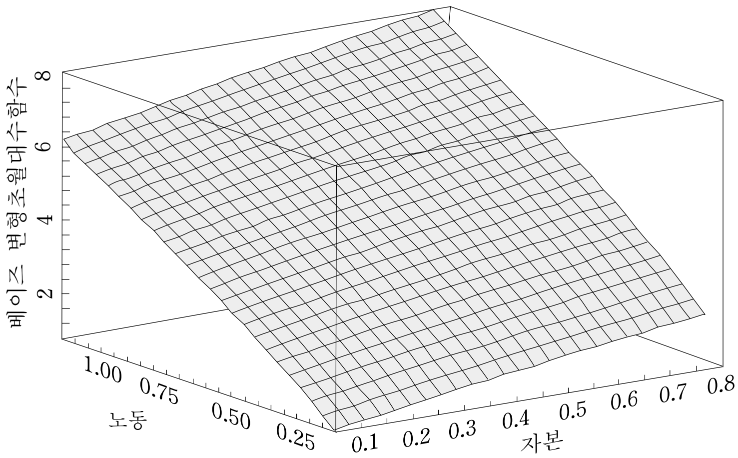
$$y = (-1.04_{(0.577)} + 1.45_{(1.04)}K^{1.01} + 3.20_{(0.952)}L^{1.01} + 1.08_{(0.915)}K^{1.01/2} + 2.27_{(1.53)}L^{1.01/2} + 1.64_{(1.31)}K^{1.01/2}L^{1.01/2})^{1/1.01} + u. \quad (15)$$

〈그림 5a〉와 〈그림 5b〉를 보면 등량곡선과 산출량 표면이 준오목성을 보여주고 있다. 아울러 본 논문에서는 별도로 기술하지 않았지만, 변형초월대수함수는 CES함수의 확장형이라고 볼 수 있으므로, CES함수의 등량곡선과 표면을 그리면 〈그림 5a〉와 〈그림 5b〉의 경우와 흡사하게 나오는 것을 확인할 수 있다.

〈그림 5a〉 베이즈 변형초월대수함수 등량곡선



〈그림 5b〉 베이즈 변형초월대수함수 표면



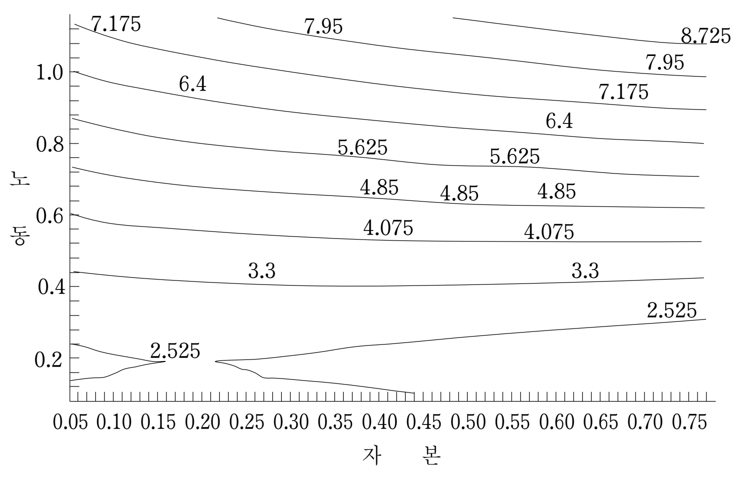
〈그림 5〉 베이즈 변형초월대수함수의 등량곡선 및 표면

5. 분수급수함수

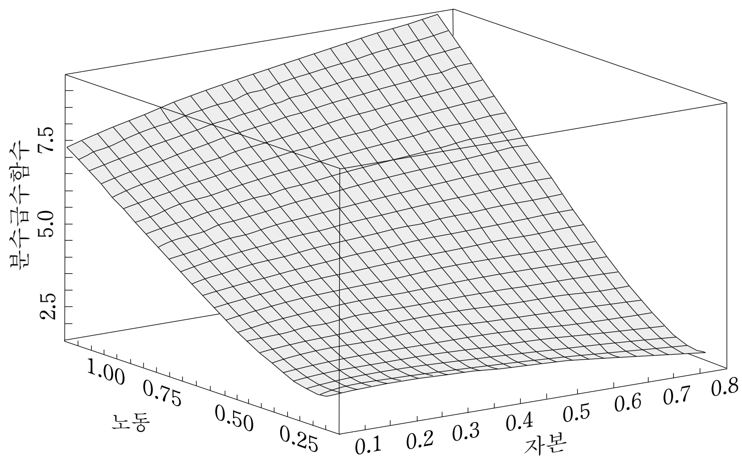
분수급수란 일반급수함수의 차수 대신에 역의 차수를 사용한 것이다. 예를 들면, x^n 대신에 $x^{1/n}$을 사용하는 것이다. 최소자승법으로 식 (12)의 모수를 추정하면,

$$\begin{aligned} y = & -11.4_{(13.7)} - 32.7_{(29.5)}K^{1/2} + 22.8_{(13.4)}L^{1/2} + 32.1_{(25.6)}K^{1/2}L^{1/2} \\ & + 68.3_{(47.8)}K^{1/4} - 10.3_{(19.5)}L^{1/4} - 60.4_{(51.0)}K^{1/4}L^{1/4} + u. \end{aligned} \tag{17}$$

〈그림 6a〉 분수급수함수의 등량곡선



〈그림 6b〉 분수급수함수의 표면



〈그림 6〉 분수급수함수의 등량곡선 및 표면

분수급수함수(fractional power series)의 등량곡선과 산출량 표면이 규칙성을 만족시키지 못하고 있다.

6. 베이지안 분수급수함수

식 (12)에 규칙성을 부여하면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

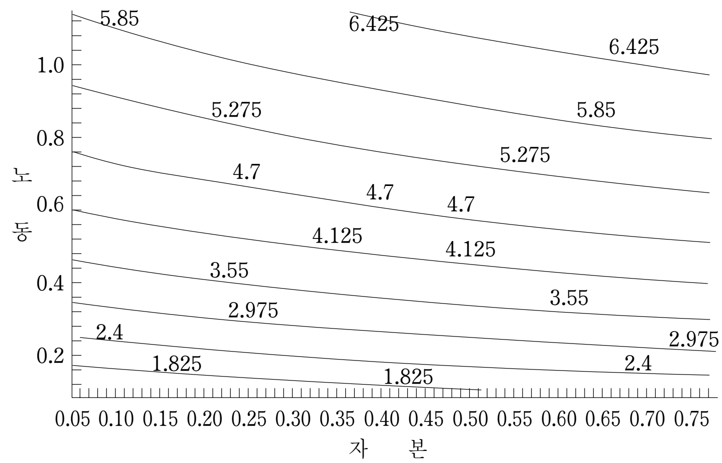
$$y=-3.96_{(1.33)}+0.942_{(0.752)}K^{1/2}+3.02_{(3.39)}L^{1/2}+0.591_{(2.55)}K^{1/2}L^{1/2}$$
$$+0.406_{(0.490)}K^{1/4}+4.25_{(3.83)}L^{1/4}+1.51_{(1.44)}K^{1/4}L^{1/4}+u. \qquad (18)$$

베이즈 방식으로 준오목성을 부과한 결과 등량곡선과 생산함수 표면의 모양이 완전히 변화하였다.

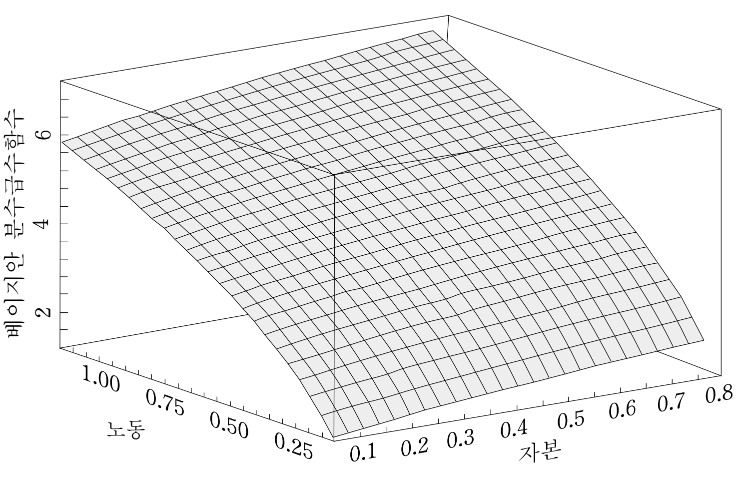
Ⅵ. 결 론

본 논문에서는 생산함수의 설정에서 흔히 고려되는 두 가지 문제점을 비교·검토하였다. 첫째는 도입된 생산함수가 함수형태 선택의 문제에서 자유로워질 수 있도록 전면적 유연성을 도입하는 문제이고, 두 번째는 선택된 모형에 규칙

〈그림 7a〉 베이지안 분수급수함수 등량곡선



〈그림 7b〉 베이지안 분수급수함수 표면



〈그림 7〉 베이지안 분수급수함수 등량곡선 및 생산함수 표면

성을 부여하여 모형표면의 기울기가 원함수의 기울기와 유사하게 만드는 문제이다. 전면적 유연성이란 원생산함수가 연속함수라는 가정하에서 표본샘플의 개수가 무한히 증가할 때 도입된 함수(전개식)의 항을 무한히 증가시킨다면, 추정된 생산함수는 변수의 모든 정의역 내에서 원생산함수를 잘 묘사하는 성질을 의미한다. 그러나 현실적으로 관측치의 수가 무한히 증가하는 경우도 없고, 또 전개식의 항을 무한히 증가시킬 수 없으므로 전면적 유연성 성질을 가진 함수라도 대개 2차나 3차 전개식으로 축소시켜서 사용할 수밖에 없다. 흔히 쓰이는

초월대수함수는 2차 전개식인데 이와 같이 절단된 전개식은 경제학에서 요구하는 함수의 규칙성을 만족시키지 못하게 된다. 생산함수가 규칙성을 만족하지 못하면, 생산함수에 요구되는 기본성질을 갖추지 못하고 표면이 매끄럽지 못하다. 기울기의 추정이 부정확하여지면, 한계생산량의 추정이 부정확해져서 생산함수로 이용할 수가 없다.

본 논문에서는 경제이론에 입각하여 유도된 함수(콥-더글러스 생산함수나 CES 함수)들을 확장시켜 전면적 유연성을 가지도록 변형된 함수들을 고려하였다. 그러나 편의상 전개식의 차수는 2차식으로 제한하고, 여기에 규칙성을 부여하는 방법을 고려하였다. 생산함수가 선형함수로 표시되는 경우, 추정된 모수들이 다중 t-분포를 갖는다고 가정한다. 이 t-분포함수에서 새로운 모수표본들을 추출하고, 이 중에서 생산함수의 규칙성을 만족하는 모수들은 선택한다. 규칙성을 만족하지 못하는 모수들은 버린 후에 선택된 모수들의 평균을 구하는 방식으로 생산함수에 규칙성을 부여하였다. 규칙성을 부여한 함수와 부여하지 않은 함수의 등량곡선과 3차원 표면을 비교·분석하여 본 결과 본 논문에서 제시한 방법이 유용하다는 것을 보였다.

본 논문에서 소개한 방법의 특징은 기존의 다른 논문에서 제시된 방법보다 훨씬 쉬운 방법으로 규칙성을 부여한다는 데 있다. 기존의 논문은 모두 matlab 프로그램과 TOMLAB/NPSOL(2008) toolbox를 이용하는데, 일반인이 이들 프로그램의 구입과 사용이 어렵기 때문에 흔히 사용되는 eviews 프로그램으로 생산함수에 규칙성을 부여하는 방법을 제시하였다. 그러나 생산함수의 형태가 비선형인 경우에는 TOMLAB/NPSOL을 이용할 수밖에 없다.

부록: 베이지안 POR을 이용한 모형의 선택

내포된 모형을 비교·분석할 때 흔히 베이지안 POR(posterior odds ratio)이 사용된다. 주어진 자료가 콥-더글러스함수에 의하여 잘 묘사되는가, 아니면 콥-더글러스함수를 확장한 초월대수함수가 더 적절한가에 대한 판단을 하여야 할 경우가 있다. 이때 여러 가지 모형선택 기준을 적용할 수 있지만, 본 논문에서는 POR을 이용하고자 한다. Zellner(1984)는 다음과 같은 회귀분석을 도입하였다.

$$y = l\alpha + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \mu.$$

우변의 l는 $n\times 1$의 일벡터이다. 그리고 X_1, X_2, β_1과 β_2의 차원은 $n\times k_1$, $n\times k_2$, $k_1\times 1$과 $k_2\times 1$이다. 이제 다음과 같은 가정을 도입하자.

$$H_A : \beta_2 = 0,$$
$$H_B : \beta_2 \neq 0.$$

제프리 타입의 사전분포(Jeffreys-like priors)를 가정하고, Zellner(1984)는 다음과 같은 사후비율(posterior odds ratio)을 구하였다. 사후비율 K_{AB}을 구하기 위한 가정 H_A와 가정 H_B의 사전비율의 비를 일이라고 가정하고,

$$K_{AB} = b(v_B/2)^{k_2/2}[(1-R_B^2)/(1-R_A^2)]^{(v_B-1)/2}.$$

여기서 $b = \pi^{1/2}/\Gamma[(k_2+1)/2]$, $v_B = n - k_1 - k_2 - 1$이고 R_A^2와 R_B^2는 가정 H_A와 H_B하에서의 R^2값이다. 만일 사후비율 $K_{AB} > 1$이라면 자료에 의하여 모형 A가 선호된다는 뜻이다. 만일 모형 A가 콥-더글러스함수이고, 모형 B가 초월대수함수라고 정한 경우 $K_{AB} < 1$이라면, 주어진 자료는 모형 B(초월대수함수)에 의하여 더 잘 묘사된다는 것이다.

참 고 문 헌

Barnett, W. and J. Binner, "Functional Structure and Approximation in Econometrics," Amsterdam: Elsevier, 2004.

Barnett, W. and A. Jonas, *Economics Letters* 11, 1983, 337～342.

Barnett, W., Y. Lee, and M. Wolfe, "The Global Properties of the Two Minflex Laurent Flexible Functional Forms," *Journal of Econometrics* 36, 1987, 281～298.

Berge, C., Topological Spaces, New York: The Macmillan Company, 1963.

Diewert, E., "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function," *Journal of Political Economy* 79, 1971, 482～507.

Diewert, E., M. Avriel, and I. Zang, "Nine Kinds of Quasiconcavity and Concavity," *Journal of Economic Theory*, 1981, 397～420.

Doornik, J., An Introduction to OxMetrics 5, London: Timberlake Consultants Ltd., 2007.

Fuss, M., D. McFadden, and Y. Mundlak, *A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production*, Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1978.

Gallant, A., "On the Basis in Flexible Functional Forms and an Essentially Unbiased Form: The Fourier Flexible Form," *Journal of Econometrics* 15, 1981, 211～246.

Gallant, A. and G. Golub, "Imposing Curvature Restrictions on Flexible Functional Forms," *Journal of Econometrics* 267, 1984, 295～321.

Geweke, J., "Exact Inference in the Inequality Constrained Normal Linear Regression Model," *Journal of Applied Econometrics* 1, 1986, 127～142.

Greene, W., *Econometric Analysis*, 6th edition, Upper Saddle, River: Pearson Education, 2008.

Judge, G., R. Hill, W. Griffiths, H. Lutkepohl, and T. Lee, *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, second edition, New York: Wiley, 1988.

Nerlove, M., Returns to Scale in Electricity Supply, Measurement in Economics, edited by C. Christ and others, Chapter 8, Stanford: Stanford University Press, 1963.

Rossi, P., "Comparison of Alternative Functional Forms in Production," *Journal of Econometrics* 30(1-2), 1985, 345～361.

Ryu, H., "Maximum Entropy Estimation of Density and Regression Functions," *Journal of Econometrics* 56, 1993, 397～440.

______, "Economic Assumptions and Choice of Functional Forms: Comparison of Top Down and Bottom Up Approaches," *Journal of Productivity Analysis* 25, 2009, 243～255.

Ryu, H. and D. Slottje, "Two Flexible Functional Form Approaches for Approximating the Lorenz Curve," *Journal of Econometrics* 72, 1996, 251～274.

Serletis, A. and A. Shahmoradi, "Bayesian Estimation of Flexible Functional Forms, Curvature Conditions and the Demand for Assets", edited by William Barnett and Apostolos Serletis, *Functional Structure Inference*, chapter 4, Elsevier, Amsterdam, 2007.

______, "Semi-nonparametric Estimates of the Demand for Money in the United States," *Macroeconomic Dynamics* 9, 2005, 542～559.

Shazam, Econometrics Software, Version 10, User's Reference Manual, 2004.

Tomlab, User's guide for Tomlab/NPSOL, http://tomopt.com, 2008.

Zellner, A., *Basic Issues in Econometrics*, Chicago: University of Chicago Press, 1984.

Zellner, A. and N. Revankar, "Generalized Production Functions," *The Review of Economic Studies* 36, 1969, 241～250.

Zellner, A. and H. Ryu, "Alternative Functional Forms for Production, Cost and Returns to Scale Functions," *Journal of Applied Econometrics* 13, 1998, 101～127.

[Abstract]

Production Functions with Regularity and Global Flexibility

Hang Keun Ryu*

To choose the functional form for a production function, the regularity condition and global flexibility are often considered. The regularity condition is satisfied when the production function is a positive, monotone increasing quasiconcave function. The Cobb-Douglas and CES functions satisfy the regularity condition, but the translog function does not satisfy the regularity in general. The global flexibility is satisfied when the proposed function can approximate the unknown true function very closely at all points. A polynomial series with infinite number of terms are often considered. The infinite number of parameters is supposed to be estimated with infinite number of observations. A logarithmic polynomial series (which is an extended translog function) and the Fourier flexible forms satisfy the global flexibility, but they do not satisfy the regularity condition.

In this paper, a simple method to impose the regularity condition for the globally flexible functional forms (though truncated) is proposed and examples based on standard econometric software such as Eviews are exhibited. Previous methods require use of complicated computer software such as Tomlab/NPSOL based on Matlab.

Keywords: global flexibility, regularity, restriction of parameter space
JEL Classification: C51

* Professor, Department of Economics, Chung Ang University, Tel: (031)-670-3241, FAX: (02) 515-3256, E-mail: hangryu@cau.ac.kr